अध्याय 3

दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- एक ही (या समान) दो चरों वाले रैखिक समीकरण दो चरों वाले समीकरणों का एक युग्म बनाते हैं।
- रैखिक समीकरणों के एक युग्म का व्यापक रूप है:

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

  $a_2x + b_2y + c_2 = 0,$

  जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि $a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ है।
- यदि रैखिक समीकरणों का एक युग्म संगत (या अविरोधी) होता है तो इसका या अद्वितीय हल हो या अपरिमित रूप से अनेक हल हों।

  अपरिमित रूप से अनेक हलों की स्थिति में, रैखिक समीकरणों का यह युग्म आश्रित कहलाता है। इस प्रकार, इस स्थिति में, रैखिक समीकरणों का युग्म आश्रित और संगत होता है।
- रैखिक समीकरण का युग्म असंगत (या विरोधी) होता है, यदि उसका कोई हल नहीं हो।
- मान लीजिए कि $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ दो चरों वाली रैखिक समीकरणों का एक युग्म है।

(I) यदि $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ है, तो

(i) रैखिक समीकरणों का युग्म संगत होता है ;

(ii) युग्म का आलेख एक अद्वितीय बिंदु पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं का एक युग्म होता है तथा यही प्रतिच्छेद बिंदु समीकरणों के युग्म का हल प्रदान करता है।

(II) यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ है, तो

(i) रैखिक समीकरणों का युग्म असंगत (या विरोधी) होता है;

(ii) यहाँ आलेख समांतर रेखाओं का एक युग्म होगा और इसलिए समीकरणों के इस युग्म का कोई हल नहीं होगा।

(III) यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ है, तो

(i) रैखिक समीकरणों का युग्म आश्रित और संगत होता है;

(ii) यहाँ आलेख संपाती रेखाओं का एक युग्म होगा। इन रेखाओं पर स्थित प्रत्येक बिंदु एक हल होगा। इसलिए, समीकरणों के इस युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे।

- रैखिक समीकरण के एक युग्म को बीजीय रूप से निम्नलिखित विधियों में से किसी एक विधि से हल किया जा सकता है:

  (i) प्रतिस्थापन विधि

  (ii) विलोपन विधि

  (iii) वज्र–गुणन विधि

- रैखिक समीकरणों के युग्म को ज्यामितीय/आलेखीय विधि द्वारा भी हल किया जा सकता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : समीकरण $5x - 15y = 8$ और $3x - 9y = \frac{24}{5}$ के युग्म का/के

(A) एक हल है (B) दो हल हैं

(C) अपरिमित रूप से अनेक हल है (D) कोई हल नहीं है

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योग 9 है। यदि इसमें 27 जोड़ें, तो इस संख्या के अंक पलट जाते हैं। वह संख्या है

(A) 25 (B) 72 (C) 63 (D) 36

हल : उत्तर (D)

प्रश्नावली 3.1

दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. आलेखीय रूप से,

$6x - 3y + 10 = 0$

$2x - y + 9 = 0$

समीकरणों का युग्म दो रेखाएँ निरूपित करता है, जो

(A) ठीक एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं (B) ठीक दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं

(C) संपाती हैं (D) समांतर हैं

2. समीकरण $x + 2y + 5 = 0$ और $-3x - 6y + 1 = 0$ के युग्म

(A) का एक अद्वितीय हल है (B) के ठीक दो हल हैं

(C) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं (D) का कोई हल नहीं है

3. यदि रैखिक समीकरणों का कोई युग्म संगत है, तो इसके आलेख की रेखाएँ होंगी

(A) समांतर (B) सदैव संपाती

(C) प्रतिच्छेदी या संपाती (D) सदैव प्रतिच्छेदी

4. समीकरण $y = 0$ और $y = -7$ के युग्म

(A) का एक हल है (B) के दो हल हैं

(C) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं (D) का कोई हल नहीं है

5. समीकरण $x = a$ और $y = b$ का युग्म आलेखीय रूप से वे रेखाएँ निरूपित करता है, जो

(A) समांतर हैं (B) (b, a) पर प्रतिच्छेद करती हैं

(C) संपाती हैं (D) (a, b) पर प्रतिच्छेद करती हैं

6. k के किस मान के लिए समीकरण $3x - y + 8 = 0$ और $6x - ky = -16$ संपाती रेखाएँ निरूपित करते हैं?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) –2

7. यदि $3x + 2ky = 2$ और $2x + 5y + 1 = 0$ द्वारा दी जाने वाली रेखाएँ परस्पर समांतर हैं, तो k का मान है

(A) $\frac{-5}{4}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

8. c का वह मान, जिसके लिए समीकरणों $cx - y = 2$ और $6x - 2y = 3$ के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे, है

(A) 3 (B) – 3 (C) –12 (D) कोई मान नहीं

9. आश्रित रैखिक समीकरणों के युग्म का एक समीकरण $-5x + 7y = 2$ है। दूसरा समीकरण हो सकता है

(A) $10x + 14y + 4 = 0$ (B) $-10x - 14y + 4 = 0$

(C) $-10x + 14y + 4 = 0$ (D) $10x - 14y = -4$

10. एक अद्वितीय हल $x = 2, y = -3$ वाले समीकरण का एक युग्म है

(A) $x + y = -1$
$2x - 3y = -5$

(B) $2x + 5y = -11$
$4x + 10y = -22$

(C) $2x - y = 1$
$3x + 2y = 0$

(D) $x - 4y - 14 = 0$
$5x - y - 13 = 0$

11. यदि $x = a$ और $y = b$ समीकरणों $x - y = 2$ और $x + y = 4$, का हल है, तो a और b के मान क्रमशः हैं

(A) 3 और 5 (B) 5 और 3

(C) 3 और 1 (D) –1 और –3

12. अरुणा के पास केवल 1रु और 2 रु के सिक्के हैं। यदि उसके पास कुल 50 सिक्के हैं तथा कुल धनराशि 75 रु है, तो 1रु और 2 रु के सिक्कों की संख्याएँ क्रमशः हैं

(A) 35 और 15 (B) 35 और 20

(C) 15 और 35 (D) 25 और 25

13. पिता की आयु पुत्र की आयु की 6 गुनी है। चार वर्ष के बाद, पिता की आयु अपने पुत्र की आयु की चार गुनी होगी। पुत्र और पिता की वर्तमान आयु (वर्षों में) क्रमशः हैं

(A) 4 और 24 (B) 5 और 30

(C) 6 और 36 (D) 3 और 24

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: क्या यह कहना सत्य है कि समीकरणों $-x+2y+2=0$ और $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y-1=0$ के युग्म का एक अद्वितीय हल है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : हाँ।

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$ है, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{-\frac{1}{4}}=-8$ है।

चूँकि $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ है, इसलिए समीकरणों के इस युग्म का एक अद्वितीय हल है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: क्या समीकरणों $4x + 3y - 1 = 5$ और $12x + 9y = 15$ संपाती रेखाओं का एक युग्म निरूपित करती हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : नहीं।

हम समीकरणों को पुनः निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं:

$4x + 3y = 6$

$12x + 9y = 15$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{3}$ और $\frac{c_1}{c_2}=\frac{2}{5}$ है।

चूँकि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$,इसलिए दी हुई समीकरण संपाती रेखाओं का युग्म निरूपित नहीं करती हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 3: क्या समीकरणों $x + 2y - 3 = 0$ और $6y + 3x - 9 = 0$ का युग्म संगत है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

हल : हाँ। समीकरणों में, पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$x + 2y - 3 = 0$$

$$3x + 6y - 9 = 0$$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}$ और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{3}$ है। क्योंकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ है, इसलिए समीकरणों का युग्म संगत है।

प्रश्नावली 3.2

1. क्या समीकरणों के निम्नलिखित युग्म का कोई हल नहीं है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $2x + 4y = 3$
$12y + 6x = 6$

(ii) $x = 2y$
$y = 2x$

(iii) $3x + y - 3 = 0$
$2x + \frac{2}{3}y = 2$

2. क्या निम्नलिखित समीकरण संपाती रेखाओं का एक युग्म निरूपित करती है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $3x + \frac{1}{7}y = 3$
$7x + 3y = 7$

(ii) $-2x - 3y = 1$
$6y + 4x = -2$

(iii) $\frac{x}{2} + y + \frac{2}{5} = 0$
$4x + 8y + \frac{5}{16} = 0$

3. क्या रैखिक समीकरणों के निम्नलिखित युग्म संगत हैं? अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए।

(i) $-3x - 4y = 12$
$4y + 3x = 12$

(ii) $\frac{3}{5}x - y = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}x - 3y = \frac{1}{6}$

(iii) $2ax + by = a$
$4ax + 2by - 2a = 0$; $a, b \neq 0$

(iv) $x + 3y = 11$
$2(2x + 6y) = 22$

4. समीकरण

$\lambda x + 3y = -7$

$2x + 6y = 14$

के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होने के लिए, λ का मान 1 होना चाहिए। क्या यह कथन सत्य है? कारण दीजिए।

5. c के सभी वास्तविक मानों के लिए, समीकरण-युग्म

$x - 2y = 8$

$5x - 10y = c$

का एक अद्वितीय हल है। औचित्य के साथ उत्तर दीजिए कि यह सत्य है या असत्य।

6. $x = 7$ द्वारा निरूपित रेखा x– अक्ष के समांतर है। औचित्य के साथ उत्तर दीजिए कि यह सत्य है या असत्य।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: p और q के किन मानों के लिए समीकरण-युग्म

$4x + 5y = 2$

$(2p + 7q)\, x + (p + 8q)\, y = 2q - p + 1$

के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

हल : यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2p+7q}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{p+8q}$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{2q-p+1}$ है।

किसी समीकरण-युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होने के लिए,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ होता है।

अतः, $\frac{4}{2p+7q}=\frac{5}{p+8q}=\frac{2}{2q-p+1}$

इसलिए, $\frac{4}{2p+7q}=\frac{5}{p+8q}$ और $\frac{4}{2p+7q}=\frac{2}{2q-p+1}$ है।

अर्थात्, $4p + 32q = 10p + 35q$ और $8q - 4p + 4 = 4p + 14q$ है।

अर्थात्, $6p + 3q = 0$ और $8p + 6q = 4$

अर्थात्, $q = -2p$ ...(1) और $4p + 3q = 2$ ...(2)

समीकरण (1) से प्राप्त q के मान को समीकरण (2) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$4p - 6p = 2$

या $p = -1$

p के इस मान को समीकरण (1) में रखने (प्रतिस्थापित करने) पर, हमें प्राप्त होता है:

$q = 2$

अतः, $p = -1, q = 2$ के लिए, दिए हुए समीकरण-युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: निम्नलिखित समीकरण-युग्म को हल कीजिए :

$21x + 47y = 110$

$47x + 21y = 162$

हल : हमें प्राप्त है :

$21x + 47y = 110$ ...(1)
$47x + 21y = 162$ ...(2)

समीकरण (1) को 47 से और समीकरण (2) को 21 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$987x + 2209\,y = 5170$ ...(3)

$987x + 441y = 3402$ ...(4)

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर, हमें प्राप्त होता है:

$1768y = 1768$

या $y = 1$

समीकरण (1) में y का मान प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$21x + 47 = 110$

या $21x = 63$

या $x = 3$

अतः, $x = 3, y = 1$

वैकल्पिक हल: हमें प्राप्त है:

$21x + 47y = 110$ ...(1)

$47x + 21y = 162$ ...(2)

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$68x + 68y = 272$

या $x + y = 4$ ...(5)

समीकरण (1) को समीकरण (2) में से घटाने पर, हमें प्राप्त होता है :

$26x – 26y = 52$

या $x – y = 2$ ...(6)

समीकरण (5) और (6) को क्रमशः जोड़ने और घटाने पर, हमें प्राप्त होता है :

$x = 3, \quad y = 1$

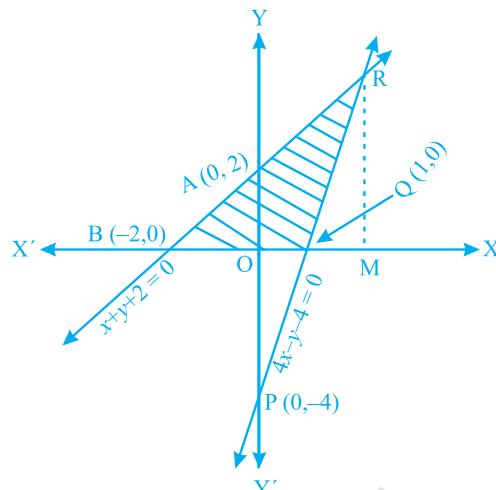
प्रतिदर्श प्रश्न 3: समीकरण $x – y + 2 = 0$ और $4x – y – 4 = 0$ के युग्म का आलेख खींचिए। इस प्रकार खींची गयी रेखाओं और x-अक्ष से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समीकरणों का आलेख खींचने के लिए, हम इन समीकरणों में से प्रत्येक के दो हल ज्ञात करते हैं, जो सारणी 3.1 में दिए गए हैं:

सारणी 3.1

x	0	–2
$y = x + 2$	2	0

x	0	1
$y = 4x – 4$	– 4	0

बिंदुओं A (0, 2), B (–2, 0), P (0, – 4) और Q (1, 0) को आलेख कागज़ पर आलेखित कीजिए तथा इन बिंदुओं को रेखाएँ AB और PQ बनाने के लिए मिलाइए, जैसा कि आकृति 3.1 में दर्शाया गया है:

आकृति 3.1

हम देखते हैं कि इन दोनों रेखाओं AB और PQ में एक बिंदु R (2, 4) उभयनिष्ठ है। इन रेखाओं और x- अक्ष से बनने वाला त्रिभुज BQR है।

इस त्रिभुज के शीर्ष B (–2, 0), Q (1, 0) और R (2, 4) हैं।

हम जानते हैं कि

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार $\times$ शीर्षलंब

यहाँ, आधार = BQ = BO + OQ = 2 + 1 = 3 इकाई

शीर्षलंब = RM = R की कोटि = 4 इकाई

अत:, त्रिभुज BQR का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times 3\times 4 = 6$ वर्ग इकाई

प्रश्नावली 3.3

1. λ के किस (किन) मान (मानों) के लिए रैखिक समीकरण-युग्म

$$\lambda x + y = \lambda^2$$

$$x + \lambda y = 1$$

(i) का कोई हल नहीं होगा ?

(ii) के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे ?

(iii) का एक अद्वितीय हल होगा ?

2. k के किस (किन) मान (मानों) के लिए, समीकरण-युग्म

$kx + 3y = k - 3$

$12x + ky = k$

का कोई हल नहीं होगा ?

3. a और b के किन मानों के लिए, निम्नलिखित रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

$x + 2y = 1$

$(a - b)x + (a + b)y = a + b - 2$

4. निम्नलिखित समीकरण-युग्मों (i) से (iv) में p और (v) में p तथा q के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $3x - y - 5 = 0$ और $6x - 2y - p = 0$,
यदि इन समीकरणों द्वारा निरूपित रेखाएँ समांतर हैं।

(ii) $-x + py = 1$ और $px - y = 1$,
यदि समीकरण-युग्म का कोई हल नहीं है।

(iii) $-3x + 5y = 7$ और $2px - 3y = 1$,

यदि इन समीकरणों द्वारा निरूपित रेखाएँ एक अद्वितीय बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

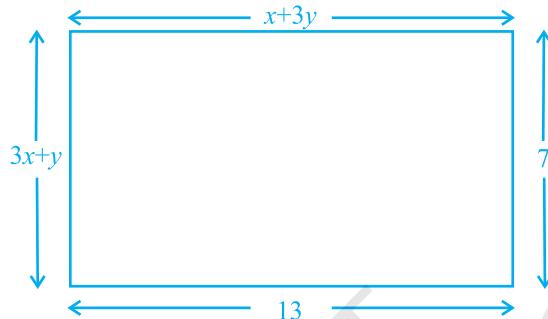
(iv) $2x + 3y - 5 = 0$ और $px - 6y - 8 = 0$,
यदि समीकरण-युग्म का एक अद्वितीय हल है।

(v) $2x + 3y = 7$ और $2px + py = 28 - qy$,
यदि समीकरण-युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

5. दो सीधे पथ समीकरणों $x - 3y = 2$ और $-2x + 6y = 5$ द्वारा निरूपित हैं। जाँच कीजिए कि ये पथ परस्पर काटते हैं या नहीं।

6. रैखिक समीकरणों का एक ऐसा युग्म लिखिए जिसका एक अद्वितीय हल $x = -1, y = 3$ हो। आप ऐसे कितने युग्म लिख सकते हैं?

7. यदि $2x + y = 23$ और $4x - y = 19$ है, तो $5y - 2x$ और $\frac{y}{x} - 2$ के मान ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित आयत (देखिए आकृति 3.2) में x और y के मान ज्ञात कीजिए:

आकृति 3.2

9. निम्नलिखित समीकरण-युग्मों को हल कीजिए :

(i) $x + y = 3.3$

$\frac{0.6}{3x-2y} = -1, \quad 3x-2y \neq 0$

(ii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 4$

$\frac{5x}{6} - \frac{y}{8} = 4$

(iii) $4x + \frac{6}{y} = 15$

$6x - \frac{8}{y} = 14, \quad y \neq 0$

(iv) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8, \quad x, y \neq 0$

(v) $43x + 67y = -24$

$67x + 43y = 24$

(vi) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$

$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2, \quad a, b \neq 0$

(vii) $\frac{2xy}{x+y} = \frac{3}{2}$

$\frac{xy}{2x-y} = \frac{-3}{10}, \quad x + y \neq 0, 2x - y \neq 0$

10. समीकरण $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}-1=0$ और $\frac{x}{8}+\frac{y}{6}=15$ के युग्म का हल ज्ञात कीजिए। इसके बाद λ ज्ञात कीजिए, यदि $y=\lambda x+5$ है।

11. आलेखीय विधि से ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण-युग्म संगत हैं या नहीं। यदि संगत हैं, तो इन्हें हल कीजिए।

(i) $3x+y+4=0$
$6x-2y+4=0$

(ii) $x-2y=6$
$3x-6y=0$

(iii) $x+y=3$
$3x+3y=9$

12. समीकरण $2x+y=4$ और $2x-y=4$ के युग्म का आलेख खींचिए। इन रेखाओं और y-अक्ष से बनने वाले त्रिभुज के शीर्ष बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए। साथ ही, इस त्रिभुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

13. रैखिक समीकरण $x+y=2$ और $2x-y=1$ के युग्म के हल को निरूपित करने वाले बिंदु से होकर जाने वाली एक रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए। हम ऐसी कितनी रेखाएँ ज्ञात कर सकते हैं?

14. यदि $2x^3+ax^2+2bx+1$ का एक गुणनखंड $x+1$ है, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए, जब कि $2a-3b=4$ दिया हुआ है।

15. किसी त्रिभुज के कोण x, y और $40°$ हैं। दोनों कोणों x और y का अंतर $30°$ है। x और y ज्ञात कीजिए।

16. दो वर्ष पहले, सलीम की आयु अपनी पुत्री की आयु की तिगुनी थी तथा छः वर्ष बाद उसकी आयु पुत्री की आयु के दुगुने से चार वर्ष अधिक होगी। उनकी वर्तमान आयु क्या है?

17. पिता की आयु अपने दोनों बच्चों की आयु के योग की दुगुनी है। 20 वर्ष बाद, उसकी आयु अपने बच्चों की आयु के योग के बराबर होगी। पिता की आयु ज्ञात कीजिए।

18. दो संख्याएँ 5 : 6 के अनुपात में हैं। यदि प्रत्येक संख्या में से 8 घटा दिया जाए, तो यह अनुपात 4 : 5 हो जाता है। ये संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

19. दो परीक्षा कक्षों A और B में कुछ विद्यार्थी हैं। दोनों कक्षों में विद्यार्थियों की संख्याएँ बराबर करने के लिए, A से B में 10 विद्यार्थी भेजे जाते हैं। परंतु यदि B से 20 विद्यार्थी A में भेज दिए जाएँ, तो A में विद्यार्थियों की संख्या B के विद्यार्थियों की संख्या की दुगुनी हो जाती है। दोनों कक्षों में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

20. कोई दुकानदार पढ़ने के लिए पुस्तकें किराए पर देता है। वह प्रथम दो दिन के लिए एक निश्चित शुल्क लेता है और उसके बाद प्रत्येक दिन के लिए एक अतिरिक्त शुल्क लेता है। लतिका ने एक पुस्तक छः दिन तक रखने के लिए 22रु दिए, जबकि आनंद ने एक पुस्तक चार दिन तक रखने के लिए 16 रु दिए। निश्चित शुल्क तथा प्रत्येक दिन का अतिरिक्त शुल्क ज्ञात कीजिए।

21. किसी प्रतियोगात्मक परीक्षा में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए 1 अंक दिया जाता है, जब कि प्रत्येक गलत उत्तर के लिए $\frac{1}{2}$ अंक काट लिया जाता है। जयंती ने 120 प्रश्नों के उत्तर दिए और 90 अंक प्राप्त किए। उसने कितने प्रश्नों के सही उत्तर दिए?

22. एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के कोण हैं :

$\angle A = (6x + 10)°$, $\angle B = (5x)°$

$\angle C = (x + y)°$, और $\angle D = (3y - 10)°$

x और y के मान ज्ञात कीजिए और फिर चारों कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: रेखाओं $x = -2$ और $y = 3$ के आलेख खींचिए। इन रेखाओं, x-अक्ष और y-अक्ष द्वारा बनी आकृति के शीर्ष लिखिए। इस आकृति का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

हल:

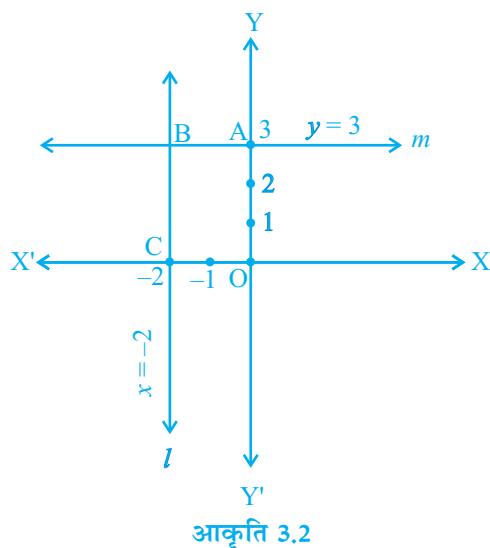
हम जानते हैं कि $x = -2$ का आलेख y-अक्ष के समांतर उसके बाईं ओर 2 इकाई की दूरी पर स्थित एक रेखा है।

अतः, $x = -2$ का आलेख रेखा l है (देखिए आकृति 3.3)।

$y = 3$ का आलेख x-अक्ष के समांतर उसके ऊपर 3 इकाई की दूरी पर स्थित एक रेखा है।

अतः, $y = 3$ का आलेख रेखा m है।

रेखाओं $x = -2$, $y = 3$, x-अक्ष और y-अक्ष से बनी आकृति OABC है, जो एक आयत है। (क्यों?)

आकृति 3.2

y-अक्ष पर A वह बिंदु है, जो x-अक्ष के ऊपर 3 इकाई की दूरी पर है। अतः, A के निर्देशांक (0, 3) हैं;

x-अक्ष पर C वह बिंदु है, जो y-अक्ष के बाईं ओर 2 इकाई की दूरी पर है। अतः, C के निर्देशांक (–2, 0) हैं;

समीकरण $x = -2$ और $y = 3$ के युग्म का हल B है। अतः, B के निर्देशांक (–2, 3) हैं।

अतः, आयत OABC के शीर्ष O (0, 0), A (0, 3), B (–2, 3) और C (–2, 0) हैं।

इस आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 2 इकाई और 3 इकाई हैं। क्योंकि एक आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई होता है, इसलिए आयत OABC का क्षेत्रफल $= 2 \times 3 = 6$ वर्ग इकाई।

प्रतिदर्श प्रश्न 2: रेखाओं $5x - y = 5$, $x + 2y = 1$ और $6x + y = 17$ द्वारा बनने वाले त्रिभुज के शीर्ष बीजीय विधि से निर्धारित कीजिए।

हल :

एक त्रिभुज का शीर्ष उस त्रिभुज की दो भुजाओं को बनाने वाली दोनों समीकरणों का उभयनिष्ठ हल होता है। अतः, दी हुई समीकरणों को युग्मों में हल करने पर, त्रिभुज के शीर्ष प्राप्त हो जाएँगे।

दी हुई समीकरणों से हमें समीकरणों के निम्नलिखित तीन युग्म प्राप्त होंगे :

$5x - y = 5$ और $x + 2y = 1$

$x + 2y = 1$ और $6x + y = 17$

$5x - y = 5$ और $6x + y = 17$

समीकरण-युग्म

$$5x - y = 5$$
$$x + 2y = 1$$

को हल करने पर, हमें $x = 1, y = 0$ प्राप्त होता है। अतः, त्रिभुज का एक शीर्ष (1, 0) है।

दूसरे समीकरण-युग्म

$$x + 2y = 1$$
$$6x + y = 17$$

को हल करने पर, $x = 3, y = -1$ प्राप्त होता है। अतः, त्रिभुज का दूसरा शीर्ष (3, –1) है।

तीसरे समीकरण-युग्म

$5x - y = 5$

$6x + y = 17,$

को हल करने पर, $x = 2, y = 5$ प्राप्त होता है। अतः, त्रिभुज का तीसरा शीर्ष (2, 5) है।

इस प्रकार, त्रिभुज के शीर्ष (1, 0), (3, –1) और (2, 5) हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 3: जमीला ने एक मेज़ और एक कुर्सी 1050 रु में बेचा, जिससे उसे मेज पर 10% लाभ और कुर्सी पर 25% लाभ हुआ। यदि उसने मेज पर 25% लाभ और कुर्सी पर 10% लाभ लिया होता, तो उसे कुल 1065 रु प्राप्त होते। प्रत्येक वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि मेज का क्रय मूल्य x रु और कुर्सी का क्रय मूल्य y रु है।

मेज का विक्रय मूल्य, जब उसे 10% लाभ पर बेचा जाता है

$$= \left(x + \frac{10}{100}x\right) \text{ रु} = \frac{110}{100}x \text{ रु}$$

कुर्सी का विक्रय मूल्य, जब उसे 25% लाभ पर बेचा जाता है

$$= \left(y + \frac{25}{100}y\right) \text{ रु} = \frac{125}{100}y \text{ रु}$$

अतः, $\frac{110}{100}x + \frac{125}{100}y = 1050$ ...(1)

मेज को 25%, लाभ पर बेचने पर, उसका विक्रय मूल्य $= \left(x + \frac{25}{100}x\right) \text{ रु} = \frac{125}{100}x \text{ रु}$

कुर्सी को 10%, लाभ पर बेचने पर, उसका विक्रय मूल्य $= \left(y + \frac{10}{100}y\right) \text{ रु} = \frac{110}{100}y \text{ रु}$

अतः, $\frac{125}{100}x + \frac{110}{100}y = 1065$ ...(2)

समीकरण (1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है :

$$110x + 125y = 105000$$

$$125x + 110y = 106500$$

इन समीकरणों को जोड़ने और घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$235x + 235y = 211500$$

तथा $15x - 15y = 1500$

अर्थात् , $x + y = 900$ ...(3)

तथा $x - y = 100$ ...(4)

समीकरण (3) और (4) को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x = 500, y = 400$$

अतः, मेज का क्रय मूल्य 500 रु और कुर्सी का क्रय मूल्य 400 रु है।

प्रतिदर्श प्रश्न 4: दो पाइपों द्वारा एक स्वीमिंग पूल को भरने में 12 घंटे लगते हैं। यदि इनमें से बड़े व्यास वाले पाइप का प्रयोग 4 घंटे करें और छोटे व्यास वाले पाइप का प्रयोग 9 घंटे करें, तो स्वीमिंग पूल केवल आधा ही भरा जा सकता है। प्रत्येक पाइप पृथक-पृथक रूप से स्वीमिंग पूल को कितने समय में भर पाएगा?

हल :

मान लीजिए कि बड़े व्यास वाले पाइप को पूल को अकेले भरने में x घंटे लगते हैं तथा छोटे व्यास वाले पाइप को अकेले भरने में y घंटे लगते हैं।

x घंटे में बड़े व्यास वाला पाइप पूल को पूरा भर देता है।

इसलिए, 1 घंटे में बड़े व्यास वाला पाइप पूल का $\frac{1}{x}$ भाग भरेगा और इसीलिए 4 घंटे में यह पाइप पूल का $\frac{4}{x}$ भाग भरेगा।

इसी प्रकार, 9 घंटे में छोटे व्यास वाला पाइप पूल का $\frac{9}{y}$ भाग भरेगा।

प्रश्न के अनुसार,

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1}{2} \quad ...(1)$$

साथ ही, दोनों पाइपों का प्रयोग करने पर पूल 12 घंटे में भर जाता है।

अतः, $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$ ...(2)

मान लीजिए कि $\frac{1}{x} = u$ और $\frac{1}{y} = v$ है। तब, समीकरण (1) और (2) क्रमशः हो जाती हैं:

$$4u + 9v = \frac{1}{2} \quad ...(3)$$

$$12u + 12v = 1 \quad ...(4)$$

समीकरण (3) को 3 से गुणा करके उसमें से समीकरण (4) को घटाने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$15v = \frac{1}{2} \text{ या } v = \frac{1}{30}$$

अब v का मान समीकरण (4) में रखने पर, हमें $u = \frac{1}{20}$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $u = \frac{1}{20}$, $v = \frac{1}{30}$

अतः, $\frac{1}{x} = \frac{1}{20}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{30}$

या $x = 20$ और $y = 30$.

अतः बड़े व्यास वाला पाइप अकेले पूल को 20 घंटे में भर सकता है तथा छोटे व्यास वाला पाइप उसे 30 घंटे में भर पाएगा।

प्रश्नावली 3.4

1. निम्नलिखित समीकरण–युग्म को आलेखीय रूप से हल कीजिए :

$$2x + y = 6$$

$$2x - y + 2 = 0$$

उन दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए, जो इन समीकरणों को निरूपित करने वाली रेखाओं द्वारा क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष द्वारा बनाए जाते हैं।

2. रेखाओं $y = x$, $3y = x$ और $x + y = 8$ से बनने वाले त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक आलेखीय विधि से निर्धारित कीजिए।

3. समीकरण $x = 3, x = 5$ और $2x - y - 4 = 0$ के आलेख खींचिए। इन रेखाओं और x–अक्ष द्वारा बनाए गए चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. 4 पेन और 4 पेंसिल बॉक्सों का मूल्य 100 रु है। एक पेन के मूल्य का तीन गुना एक पेंसिल बॉक्स के मूल्य से 15 रु अधिक है। उपरोक्त स्थिति के लिए, रैखिक समीकरणों का एक युग्म बनाइए। एक पेन और एक पेंसिल बॉक्स के मूल्य भी ज्ञात कीजिए।

5. रेखाओं

$$3x - y = 3$$
$$2x - 3y = 2$$
$$x + 2y = 8$$

से बनने वाले त्रिभुज के शीर्ष बीजीय विधि से निर्धारित कीजिए।

6. अंकिता अपने घर तक 14 km की दूरी आंशिक रूप से रिक्शा से और आंशिक रूप से बस द्वारा तय करती है। यदि वह 2 km दूरी रिक्शा से तथा शेष दूरी बस से तय करे, तो उसे कुल दूरी चलने में आधा घंटा लगता है। दूसरी ओर, यदि वह 4 km दूरी रिक्शा से और शेष दूरी बस से चले, तो उसे 9 मिनट अधिक लगते हैं। रिक्शा की चाल और बस की चाल ज्ञात कीजिए।

7. एक व्यक्ति शांत जल में 5 km/h की चाल से नाव खेने पर 40 km की दूरी धारा के प्रतिकूल जाने में उस समय से तिगुना समय लेता है जितना 40 km की दूरी धारा के अनुकूल जाने में लगता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

8. एक मोटरबोट धारा के प्रतिकूल 30 km और धारा के अनुकूल 28 km जाने में 7 घंटे का समय लगाती है। वह धारा के प्रतिकूल 21 km जाकर 5 घंटे में वापस आ सकती है। शांत जल में नाव की चाल और धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

9. दो अंकों की एक संख्या या तो अंकों के योग को 8 से गुणा कर और फिर उसमें से 5 घटा कर प्राप्त होती है या अंकों के अंतर को 16 से गुणा करके और फिर उसमें 3 जोड़ने पर प्राप्त होती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

10. रेल के एक आधे टिकट के लिए, पूरे किराए का आधा तथा आरक्षण शुल्क उतना ही देना पड़ता है जितना पूरे टिकट के लिए देना होता है। स्टेशन A से स्टेशन B तक के लिए एक प्रथम श्रेणी के आरक्षित टिकट की लागत 2530 रु है। साथ ही, A से B तक के लिए, एक प्रथम श्रेणी टिकट और एक प्रथम श्रेणी आधे टिकट की लागत 3810 रु है। स्टेशन A से स्टेशन B तक का प्रथम श्रेणी का पूरा किराया ज्ञात कीजिए तथा साथ ही एक टिकट पर आरक्षण शुल्क भी ज्ञात कीजिए।

11. एक दुकानदार ने एक साड़ी 8% लाभ पर और एक स्वेटर 10% बट्टे पर बेचा, जिससे उसे 1008 रु की धनराशि प्राप्त हुई। यदि उसने साड़ी 10% लाभ और स्वेटर को 8% बट्टे पर बेचा होता, तो उसे 1028 रु की धनराशि प्राप्त होती। साड़ी का क्रय मूल्य और स्वेटर का सूची मूल्य (बट्टे से पहले का मूल्य) ज्ञात कीजिए।

12. सुषान ने कोई धनराशि दो योजनाओं A और B में निवेशित की, जो क्रमश: 8% और 9% वार्षिक ब्याज देती हैं। उसे कुल वार्षिक ब्याज के रूप में 1860 रु प्राप्त हुए। परंतु यदि उसने इन योजनाओं में निवेशित राशियों को परस्पर बदल लिया होता, तो उसे वार्षिक ब्याज के रूप में 20 रु अधिक प्राप्त होते। उसने प्रत्येक योजना में कितनी राशि निवेशित की?

13. विजय के पास कुछ केले थे और उसने उन्हें दो समूहों (ढेरियों) A एवं B में विभाजित कर लिया। उसने पहले समूह के केलों को 2 रु के 3 केले की दर से बेचा तथा दूसरे समूह के केलों को 1 रु प्रति केले की दर से बेचा और कुल 400 रु प्राप्त किए। यदि उसने पहले समूह के केलों को 1 रु प्रति केले की दर से बेचा होता तथा दूसरे समूह के केलों को 4 रु के 5 केले की दर से बेचा होता, तो उसे कुल 460 रु प्राप्त होते। ज्ञात कीजिए कि उसके पास कुल कितने केले थे।